



گزینه ۳

۱

از آنجا که اضلاع لوزی دوه‌دو موازی‌اند، دو مثلث رنگ‌شده متشابه‌اند (ز ز) و داریم:

$$\triangle BMN \sim \triangle CNP \Rightarrow \frac{BM}{NP} = \frac{MN}{PC} = \frac{BN}{NC}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{9} = \frac{4}{PC} \Rightarrow PC = 9$$

مثلث ABC با هردو مثلث رنگ‌شده متشابه است.

$$\left. \begin{aligned} \frac{S_{BMN}}{S_{ABC}} &= \left(\frac{BM}{AB}\right)^2 = \left(\frac{4}{10}\right)^2 = \frac{4}{25} \\ \frac{S_{CNP}}{S_{ABC}} &= \left(\frac{PC}{AC}\right)^2 = \left(\frac{9}{15}\right)^2 = \frac{9}{25} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{S_{BMN} + S_{CNP}}{S_{ABC}} = \frac{13}{25}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{AMNP}}{S_{ABC}} = 1 - \frac{13}{25} = \frac{12}{25} \Rightarrow \frac{S_{AMNP}}{S_{BMN} + S_{CNP}} = \frac{12}{13}$$

گزینه ۴

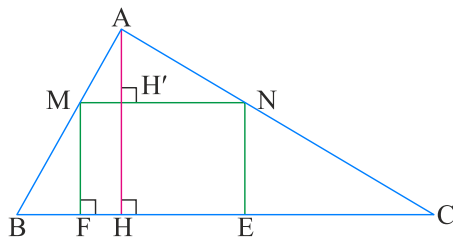
۲

نسبت محیط‌های دو مثلث متشابه با نسبت اضلاع برابر است، بنابراین:

$$\frac{y}{y+9+12} = \frac{x}{y} = \frac{y}{9} = \frac{z}{12} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{x}{y} = \frac{y}{9} = \frac{z}{12}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{y}{4} = 1/75 \\ y = \frac{9}{4} = 2/25 \\ z = \frac{12}{4} = 3 \end{cases}$$

ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. طبق قضیه تالس داریم:



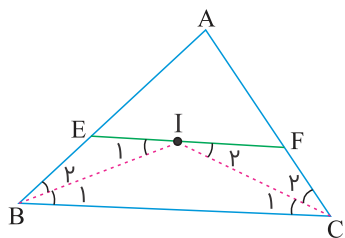
$$\triangle ABH : MH' \parallel BH \Rightarrow \frac{AH'}{AH} = \frac{AM}{AB} = \frac{3}{8} \xrightarrow{\text{تفضیل در صورت}} \frac{HH'}{AH} = \frac{5}{8}$$

$$\xrightarrow{HH' = MF} MF = \frac{5}{8}AH$$

$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{3}{8} \Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{3}{8} \Rightarrow MN = \frac{3}{8}BC$$

$$\frac{S_{MNEF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{MF \times MN}{\frac{1}{2}AH \times BC} = \frac{\frac{5}{8}AH \times \frac{3}{8}BC}{\frac{1}{2}AH \times BC} = \frac{15}{32}$$

اگر نقطه‌ای به فاصله یکسان از دو ضلع یک زاویه باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد. در نتیجه BI و CI نیمساز هستند.



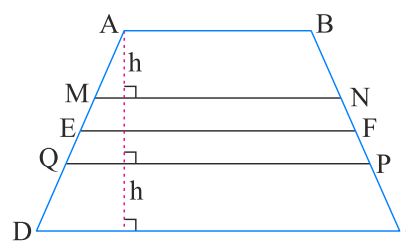
$$\begin{cases} BI \text{ نیمساز} \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{B}_2 \\ CI \text{ نیمساز} \Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{C}_2 \end{cases}$$

از طرفی باتوجه به قضیه خطوط موازی و مورب داریم:

$$EF \parallel BC \Rightarrow \begin{cases} BI \text{ مورب} : \hat{I}_1 = \hat{B}_1 = \hat{B}_2 \\ CI \text{ مورب} : \hat{I}_2 = \hat{C}_1 = \hat{C}_2 \end{cases}$$

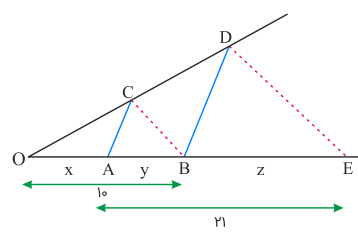
$$\Rightarrow \begin{cases} \triangle EBI \text{ متساوی الساقین} \Rightarrow BE = EI \\ \triangle FCI \text{ متساوی الساقین} \Rightarrow CF = FI \end{cases} \Rightarrow BE + CF = EI + FI = EF$$

نقاط E و F که اوساط دو ساق AD و BC می‌باشند را به هم وصل می‌کنیم. همان‌طور که واضح است، E و F اوساط ساق‌های MQ و NP از دوزنقه MNPQ نیز می‌باشند (یعنی پاره‌خط EF پاره‌خط میانی هر دو دوزنقه ABCD و MNPQ است) بنابراین داریم:



$$EF = \frac{AB + CD}{2} = \frac{MN + PQ}{2}$$

$$\frac{S_{MNPQ}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{MN + PQ}{2} \times h}{\frac{AB + CD}{2} \times 3h} = \frac{EF \times h}{EF \times 3h} = \frac{1}{3}$$

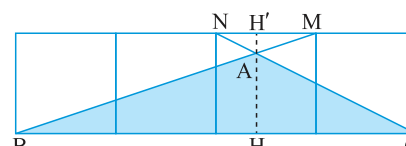


$$(OB)^2 = OA \times OE \Rightarrow 10^2 = x \times (x + 21) \Rightarrow 100 = x^2 + 21x$$

$$x^2 + 21x - 100 = 0 \Rightarrow (x + 25)(x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 & \checkmark \\ x = -25 & \times \end{cases}$$

اگر $x = 4$ باشد در این صورت $AB = 10 - 4 = 6$ می‌شود.

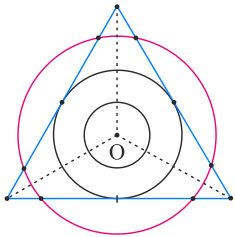
دو مثلث AMN و ABC متشابه‌اند و نسبت ارتفاع‌های آنها متناسب با نسبت اضلاع آنهاست:



$$\frac{AH}{AH'} = \frac{BC}{MN} = \frac{4}{1} \Rightarrow AH = 4AH' \Rightarrow AH = \frac{4}{5}HH' = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{AH \cdot BC}{2} = \frac{\frac{4}{5} \times 4}{2} = \frac{8}{5}$$

نقطه‌ای که از هر سه رأس مثلث به یک فاصله باشد، محل تلاقی عمودمنصف‌های این مثلث است. باتوجه به شکل زیر اگر این نقطه را O بنامیم، نقاطی که از O به فاصله ثابت ۵ باشند، روی دایره‌ای به مرکز O و بر شعاع ۵ قرار دارند.



محل‌های تلاقی این دایره با اضلاع مثلث جواب تست است که باتوجه به طول ضلع مثلث، حداکثر تعداد نقاط تلاقی برابر با ۶ است (شکل را ببینید).

دو مثلث AMN و CNP متشابه‌اند (ز ز)، پس:

$$\frac{S_{AMN}}{S_{PNC}} = \left(\frac{AN}{NC}\right)^2 = 2/25$$

$$\Rightarrow \frac{AN}{NC} = 1/5 = \frac{3}{2}$$

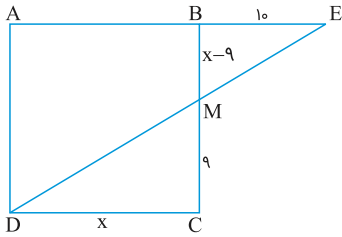
مثلث ABC با هر دو مثلث AMN و PNC متشابه است، پس:

$$\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AN}{AC}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} = 36\%$$

$$\frac{S_{PNC}}{S_{ABC}} = \left(\frac{NC}{AC}\right)^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25} = 16\%$$

$$\Rightarrow \frac{S_{BMNP}}{S_{ABC}} = 100\% - 36\% - 16\% = 48\%$$

اگر ضلع مربع را x در نظر بگیریم، داریم:



$$\triangle CDM \sim \triangle BEM \Rightarrow \frac{CM}{BM} = \frac{CD}{BE} = \frac{DM}{EM}$$

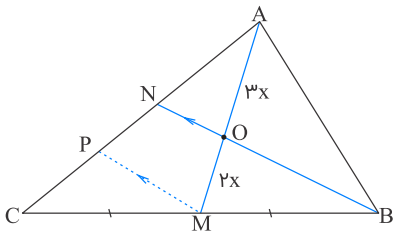
$$\Rightarrow \frac{9}{x-9} = \frac{x}{10} \Rightarrow x^2 - 9x = 90 \Rightarrow x^2 - 9x - 90 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -6 \\ x = 15 \end{cases}$$

بنابراین $BM = 6$ و نسبت مساحت دو مثلث متشابه، مجذور نسبت اضلاع است، یعنی:

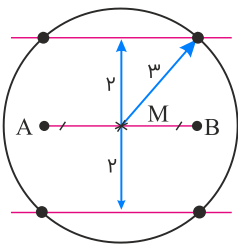
$$\frac{S_{CDM}}{S_{BEM}} = \left(\frac{CM}{BM}\right)^2 = \left(\frac{9}{6}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

باتوجه به فرض، $\frac{OA}{OM} = \frac{3}{2}$. حال خطی از M به موازات BN رسم می‌کنیم تا AC را در P قطع کند، بنابراین:



$$\left. \begin{array}{l} \triangle APM : ON \parallel MP \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{ON}{MP} = \frac{AO}{AM} = \frac{3}{5} \Rightarrow ON = \frac{3}{5}MP \\ \triangle CBN : MP \parallel BN \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{MP}{BN} = \frac{CM}{CB} = \frac{1}{2} \Rightarrow BN = 2MP \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{ON}{BN} = \frac{\frac{3}{5}MP}{2MP} = \frac{3}{10}$$

از وسط ضلع AB (نقطه M) دایره‌ای به شعاع ۳ واحد رسم کرده و دو خط موازی ضلع AB و به فاصله ۲ واحد از آن رسم می‌کنیم تا رأس C به دست بیاید. همان‌طور که می‌بینید چهار نقطه متمایز برای رأس C قابل یافتن است.



گزینه ۴

۱۳

نسبت اضلاع به صورت $5k$ ، $7k$ ، $9k$ و $11k$ است. همواره داریم:

$$5k + 7k + 9k + 11k = 160 \Rightarrow 32k = 160 \Rightarrow k = 5$$

پس طول کوچک‌ترین ضلع:

$$5k = 5(5) = 25$$

گزینه ۲

۱۴

اولاً دقت شود که مثلث ADE و DEC دارای ارتفاع مشترک هستند؛ یعنی اگر از نقطه D، عمود بر ضلع AC وارد کنیم ارتفاع مشترک هر دو مثلث ADE و DEC خواهد بود؛ بنابراین نسبت مساحت‌های آن‌ها با نسبت قاعده‌های آن‌ها برابر است؛ یعنی:

$$\frac{S_{ADE}}{S_{DEC}} = \frac{AE}{EC}$$

ازطرفی بنا به قضیه تالس داریم:

$$\begin{aligned} DE \parallel BC &\Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{2}{5} \\ \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{2}{5} &\Rightarrow \frac{AE}{AC - AE} = \frac{2}{5 - 2} \Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{2}{3} \\ \Rightarrow \frac{S_{ADE}}{S_{DEC}} = \frac{2}{3} &\Rightarrow \frac{60}{S_{DEC}} = \frac{2}{3} \Rightarrow S_{DEC} = 90 \end{aligned}$$

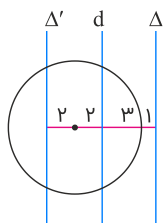
گزینه ۱

۱۵

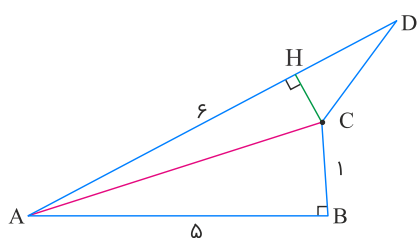
از تشابه دو مثلث ADM و BCM استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{AD}{BC} = \frac{MH'}{MH} &\Rightarrow \frac{6}{9} = \frac{MH'}{MH' + HH'} \Rightarrow \frac{6}{9} = \frac{4}{4 + HH'} \\ \Rightarrow 24 + 6HH' &= 36 \Rightarrow 6HH' = 12 \Rightarrow HH' = 2 \end{aligned}$$

باتوجه به شکل، مجموعه نقاطی که از خط d به فاصله ۴ سانتی متر هستند، دو خط Δ و Δ' موازی با d می باشند که فقط یکی از این خطها می تواند دایره را قطع کند و دو نقطه ایجاد شده، جواب این مسئله می باشد.



باتوجه به خواص نیمساز می دانیم:



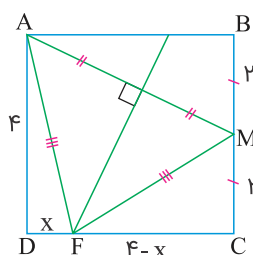
$$\begin{cases} AH = AB = 5 \Rightarrow DH = 1 \\ CH = CB = 1 \end{cases}$$

$$CDH \text{ در مثلث : } CD^2 = CH^2 + DH^2 \Rightarrow CD = \sqrt{2}$$

$$\frac{c+b}{a} + 1 = \frac{a+b}{c} + 1 = \frac{a+c}{b} + 1 \Rightarrow \frac{a+b+c}{a} = \frac{a+b+c}{c} = \frac{a+b+c}{b}$$

$$\Rightarrow a = b = c \Rightarrow \frac{c^2b + bc^2 + c^2a}{ba^2 + b^2a + ca^2} = \frac{3a^3}{3a^3} = 1$$

طول ضلع مربع ۴ است. فرض کنیم $DF = x$ داریم:

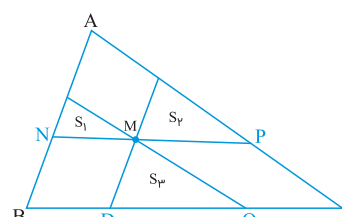


$$AF^2 = FM^2 \Rightarrow 4^2 + x^2 = 2^2 + (4-x)^2$$

$$\Rightarrow 4^2 + x^2 = 4 + 4^2 - 8x + x^2 \Rightarrow 8x = 4 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$S_{(AFM)} = 4^2 - \frac{4 \times \frac{1}{2}}{2} - \frac{2 \left(4 - \frac{1}{2}\right)}{2} - \frac{4 \times 2}{2} = 16 - 1 - 4 + \frac{1}{2} - 4 = \frac{15}{2}$$

مثلث ABC با مثلث‌های (S_1) و (S_2) و (S_3) متشابه است. همچنین چهار ضلعی‌های BDMN و CPMQ متوازی‌الاضلاع هستند و داریم:



$$\left. \begin{aligned} (S_1) &\sim \triangle ABC \Rightarrow \sqrt{\frac{S_1}{S_{ABC}}} = \frac{MN}{BC} = \frac{BD}{BC} \\ (S_2) &\sim \triangle ABC \Rightarrow \sqrt{\frac{S_2}{S_{ABC}}} = \frac{PM}{BC} = \frac{CQ}{BC} \\ (S_3) &\sim \triangle ABC \Rightarrow \sqrt{\frac{S_3}{S_{ABC}}} = \frac{DQ}{BC} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{72}} + \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{72}} + \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{72}} = \frac{BD + CQ + DQ}{BC} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{S_1} + 2\sqrt{18} + 2\sqrt{18}}{6\sqrt{72}} = 1 \Rightarrow \sqrt{S_1} = \sqrt{18} \Rightarrow S_1 = 18$$